

Aspectos Funcionales De La Función Cuadrática A Partir De La Modelación-Graficación De Fenómenos De Movimiento

Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma de Chiapas

Resumen

La Modelación-Graficación de fenómenos de movimiento ha contribuido en la construcción de argumentos y significados respecto a la función cuadrática en su aspecto funcional. Se favorecen las formas de representación (numérico, gráfico y algebraico) del fenómeno en un escenario de modelación del movimiento, a partir de los cuales, los alumnos con el apoyo de la visualización, identifican patrones y comportamientos en tablas y gráficas para establecer relaciones funcionales que caracterizan la situación, esto con el fin de tener referentes para comprender el modelo matemático que describa al fenómeno y permita intervenir en él.

Modelación, graficación, función cuadrática, funcionalidad

Antecedentes

Con base a los planes y programas de estudio de bachillerato (Secretaría de Educación Pública, 2013) y las necesidades propias de la sociedad, sin duda la educación tiene que reformularse, el papel del docente debe también modificarse y actualizarse en su actividad cotidiana, hoy en día la misma escuela debe cuestionarse sobre el papel que tiene que desempeñar ante estos cambios. Creemos entonces que el conocimiento que el alumno adquiere en la escuela debe ser funcional, es decir, que le permita resolver problemas e intervenir en su contexto donde ponga en uso el conocimiento.

En este sentido, el profesor debe buscar escenarios que permitan al alumno no solo construir su conocimiento sino que además lo ponga en uso, la clase debe

evolucionar de aquella cuando el profesor llegaba y transmitía la lección a un escenario donde propicia más bien ciertas condiciones que permitirán que los alumnos construyan y resignifiquen el conocimiento. El alumno por su lado, debe progresar en sus estrategias de un simple repaso memorístico o de hacer toda una serie de ejercicios sin sentidos, a una serie de tareas que involucren sus sentidos y favorezcan el razonamiento, pero que además, usen el conocimiento del cotidiano, aquello que proviene de la experiencia. La clase ahora no debe estar restringida en cuatro paredes, ni tampoco al profesor-alumno, la escuela es tan solo una parte de la sociedad que por ello no debe excluir el saber que se produce en ella sino más bien considerar ese saber que está inmerso en cada actividad humana. Conviene reflexionar no solo lo que ocurre en el aula sino también lo que pasa en el aula extendida, el aula de la vida cotidiana (Cantoral, 2013).

Con base a lo anterior, la presente investigación retoma los principios de la Teoría Socioepistemológica (TS) para resignificar la Función Cuadrática (FC) en situaciones de movimiento (SDM). De acuerdo con Morales y Cordero (2014), la TS tiene como uno de sus fines formular epistemologías que favorezcan la construcción social del conocimiento matemático, se fundamenta en prácticas sociales; y es allí donde según Cordero (2003) el sistema didáctico debe estar centrado: en el desarrollo de prácticas sociales para lograr la resignificación de estructuras y conceptos; las prácticas sociales deben favorecer el establecimiento de relaciones funcionales donde el conocimiento se integre a la vida para transformarla y se resignifique permanentemente en ella.

En la experiencia como docente de telebachillerato en Chiapas, hemos detectado que en el discurso escolar existe una desarticulación de los contextos numérico, gráfico y algebraico; estos no se abordan de manera sistémica al estudiar un fenómeno o problema sino que generalmente en el discurso escolar prevalece la algebrización del fenómeno. Existe una necesidad de encontrar el modelo matemático que representa el fenómeno para intervenir en él, y es aquí donde se presenta el problema para el alumno. Nuestra intervención va en el

sentido de desarrollar argumentos y significados para que el alumno pueda intervenir en la situación o fenómeno, proponemos como punto de partida actividades de visualización para el desarrollo razonado de elementos que permitan que el alumno intuya, participe y construya conjeturas, o en otras palabras, que le permita usar el conocimiento que posee y a partir de ello asociarlos con la Modelación Gráfica (M- G) para construir aspectos relacionados con la FC y sus formas de representación.

La investigación está centrada en la resignificación de la FC a partir de la M-G en SDM. La M-G retomada de Suárez (2008) constituye para nosotros la práctica social (PS) que nos hace actuar ante la situación y dirige nuestras actividades, en este sentido, es la generadora del conocimiento matemático (CM) y por tanto, constituye nuestro marco de referencia para que el conocimiento se resignifique.

Morales y Cordero (2014) mencionan que el discurso escolar no tiene marcos para que la matemática se resignifique y es allí donde la Socioepistemología ha contribuido en el diseño de epistemologías que favorezcan la construcción social del CM, sustentado en prácticas sociales. Parafraseando a Zaldívar (2014), se dice que la PS antecede a la producción de objetos y a su representación, de manera que el objeto no es preexistente sino que se construye a la par de que el humano está inmerso en una situación problemática.

Aspectos metodológicos

Ya se ha comentado que nuestra propuesta se fundamenta en la Teoría Socioepistemológica, dicho marco teórico está fundamentado en prácticas sociales. Según Montiel y Buendía (2012) este enfoque teórico atiende a fenómenos relacionados con la construcción y transmisión del CM. Las investigadoras refieren un principio fundamental: la problematización del saber matemático. Con esta problematización, se identifican aquellas significaciones que son propias del saber y que lo caracterizan como un saber funcional en

situaciones específicas, pero que han sido soslayados en el discurso matemático escolar (dME).

A partir de estos constructos conformamos nuestro marco de referencia (mR): las prácticas sociales, los usos del CM en escenarios específicos y su resignificación. Cuando hablamos de resignificación nos referimos “al proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos” (Montiel y Buendía, 2012, p. 64); el reconocimiento de esos significados que sufre el CM en situaciones específicas es donde se expresa “lo socio” (Zaldívar, 2014).

Por tanto, desde la Socioepistemología el uso del CM articulará dos elementos: la resignificación y la justificación funcional. La resignificación manifiesta el uso del CM a través de su funcionamiento y su forma; y la justificación funcional implica que la resignificación deviene en marcos argumentativos formados por significados, procedimientos y proceso-objetos (Zaldívar, 2014).

Por su parte, Suárez (2008) conforma un marco teórico para la modelación y graficación a lo que ella denomina como Categoría de la Modelación Graficación (M-G) para resignificar el cambio y la variación a través de los fenómenos de movimiento a partir de un nuevo uso de las gráficas. Con los elementos que proporciona el trabajo de Oresme ella plantea un nuevo estatus para la modelación y la graficación, conformando la categoría de M-G, la cual está conformada por:

- Datos epistemológicos de la modelación del movimiento
- Los elementos propios de la modelación
- Las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos

Los elementos epistemológicos de la categoría de M-G, son: Las realizaciones múltiples, Identificación de patrones, Realización de ajustes y Desarrollo del razonamiento. A partir de estas ideas desarrollamos el esquema metodológico

(ver figura 1), donde el alumno se involucra en un escenario de Modelación-Graficación partiendo de una situación de movimiento (SDM) y el uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador, proyector, computadora), donde se favorece el tránsito entre las formas de representación del fenómeno a través de los elementos epistemológicos de la M-G; desarrollándose así, argumentos y significados que servirán de herramientas para la construcción de un “nuevo” modelo matemático que representa la situación y que permita intervenir en ella; desde nuestra perspectiva es un “nuevo modelo” porque ha pasado por un proceso de resignificación.

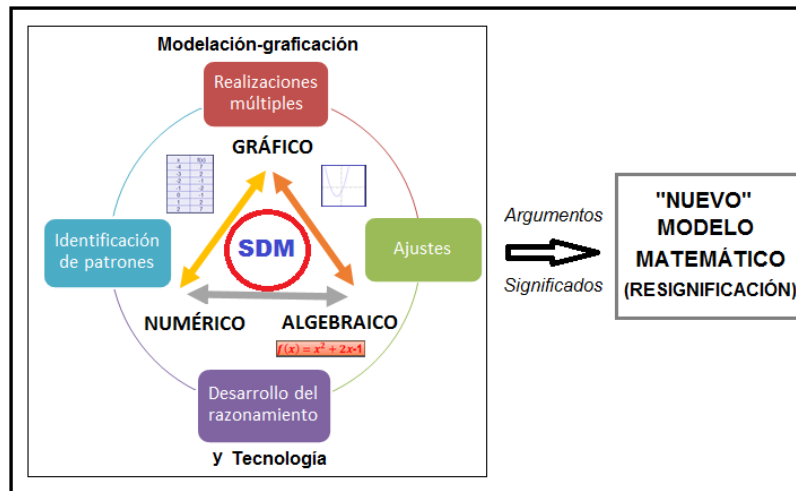


Figura 1: El esquema metodológico

El diseño de la secuencia didáctica está conformada por las siguientes fases:

- **Fase de inducción:** Esta etapa tiene como propósito inducir al alumno en la búsqueda de “patrones o reglas” que están presentes en una situación, donde ponga en uso el análisis numérico. Se pretende que el alumno identifique patrones y variables de una tabla numérica, se provoca que los alumnos establezcan relaciones entre variables y le conduzcan a formular expresiones que representan dicha situación. Se favorece la relación entre las formas de representación: numérico, algebraico y gráfico. Se proponen también ejercicios de visualización para la identificación de

patrones y relaciones entre variables presentes en situaciones que implican lo lineal y lo cuadrático.

- **Fase de modelación-graficación I:** Se modela una situación de movimiento haciendo uso de la tecnología (sensores de movimiento, emulador o software, proyector, computadora) para obtener y visualizar datos sobre el fenómeno en términos de la gráfica posición-tiempo. Con ello pretendemos que el alumno visualice comportamientos en términos de variación de parámetros tanto en la gráfica como numéricamente. Se realizan ajustes para construir la gráfica que modela una situación específica y se identifica lo que hace que varíe. Se favorece también la relación entre las tres formas de representación comentadas.
- **Fase de modelación-graficación II (Resignificación):** En esta etapa se construye con el uso de la tecnología diferentes tipos de gráficas (realizaciones múltiples) en torno a la función cuadrática, se espera que el estudiante proponga escenarios considerando la variación de patrones en los fenómenos de movimiento para construir una gráfica deseada (Realización de ajustes). Se espera que el alumno visualice cómo la gráfica cambia al modificar los parámetros y realice ajustes para construir el modelo matemático que representa una situación específica. Se analizarán qué argumentos construyen sobre lo cuadrático y las herramientas que usan para validar sus respuestas (Desarrollo del razonamiento). Finalmente se propone una actividad donde se propicia la interacción entre los tres contextos (gráfico, numérico y algebraico).

Resultados

La propuesta didáctica comentada anteriormente se ha puesto en escena en distintos escenarios (escolar, no escolar y de divulgación), por cuestiones de espacio comentamos en este apartado algunos resultados de un contexto no escolar, el análisis de los resultados se realiza considerando la resignificación a través del uso de CM en la SDM y los elementos de la M-G.

La propuesta se realizó con alumnos de nivel básico y medio en un ambiente no escolar, se tuvo mayor participación con los alumnos de nivel básico. Se observó que el uso de símbolos es provocado por la situación, dado que surge la necesidad de argumentar de donde devienen “formas de representación” pero con intención. Por otro lado los alumnos logran identificar el cambio a través de la variación de patrones, el cual una vez identificado el patrón tratan de establecer la regla, figura 2. La identificación de patrones a partir del análisis numérico y el establecimiento de reglas a partir del patrón son elementos epistemológicos que son provocados por la situación.

Se apreció también que los alumnos usan la tabla de datos para predecir estados futuros, este uso es relevante porque la tabla cobra sentido para ellos, sirve como una herramienta para intervenir en el fenómeno a partir de ella. Con los datos numéricos realizan una representación gráfica al puntear los datos y se les cuestiona a partir de ella ¿Cómo sería la gráfica si el movimiento es más lento? ¿Y si es más rápido? Se les pide que bosquejen la gráfica a partir de la situación que modelaron en la Fase II y la gráfica correspondiente, los resultados se aprecian en la figura 3, en ella puede observarse que si la persona se mueve más rápido la gráfica será más alta (mayor pendiente) y además tendrá “más ruidos” (se observan más picos en la gráfica) según comentan los alumnos, si la persona se mueve más lento entonces la gráfica estará debajo de la gráfica de referencia (gráfica 1), estas predicciones fueron validadas al realizar el proceso de M-G.

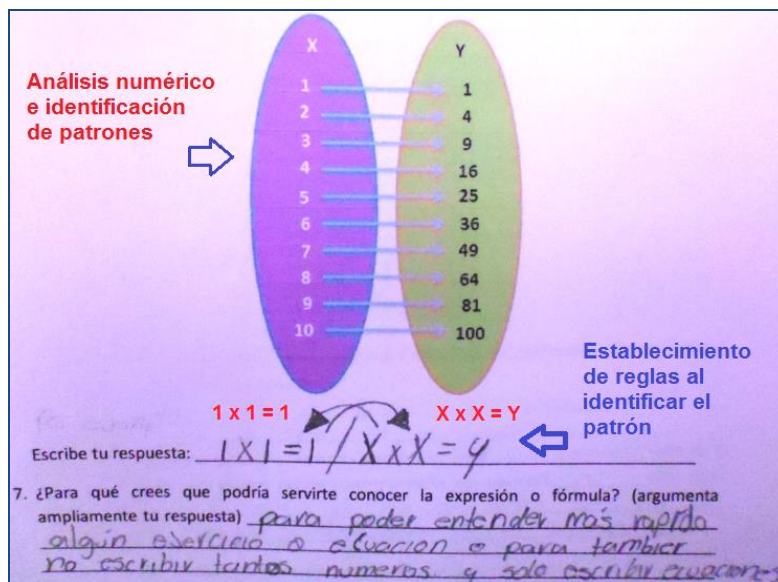


Figura 1: La identificación del patrón y el establecimiento de la regla

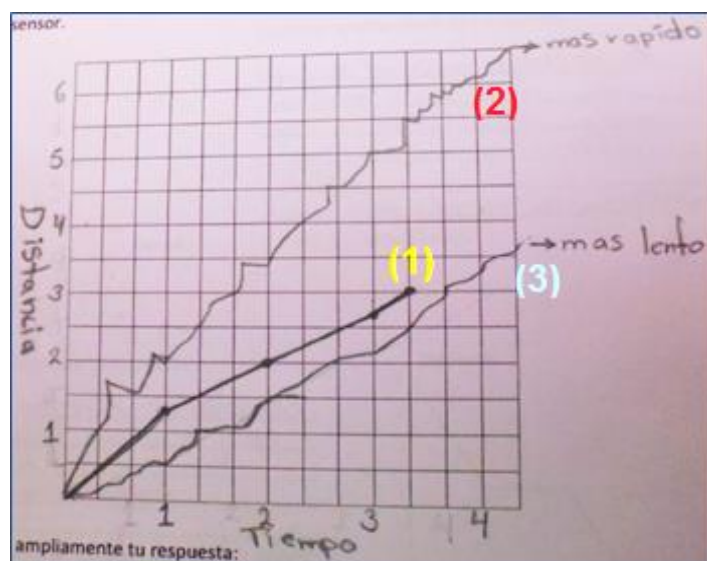


Figura 2: La gráfica como herramienta de predicción

Es importante mencionar que para la construcción de la parábola surgió una discusión muy interesante, las propuestas del movimiento fueron muy variadas, desde que el movimiento tenía que hacerse en forma curva hasta tener que desplazarse por encima de una montaña, ellos veían a la gráfica como una *trayectoria* y lo que se debía construir era la trayectoria y no pensaban en la relación que juegan las variables que están presentes en el movimiento. La

modelación jugó un papel muy importante porque permitió realizar las propuestas que ellos emitieron y contrastarlas con la situación, se logró construir nuevos modelos y formas y consensar entre todos una propuesta final que se validó con el proceso de M-G, en la figura 4 se observa la gráfica que se construyó con el apoyo del sensor.

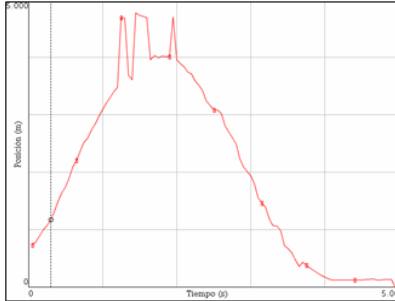


Figura 4: Construcción de la gráfica con el apoyo de la tecnología

Conclusiones

Sé observó que el alumno desarrolló habilidades al transitar de un ambiente a otro (numérico, gráfico y algebraico) permitiéndole contar con más herramientas para construir argumentos y significados sobre el concepto de función. A través de las actividades que desarrollaron los alumnos conocieron el proceso de construcción de una recta y una curva (parábola), en dónde la situación participa en el discurso y las formas de representación gráfica y numérica tienen sentido y significado en términos de la situación de movimiento. La Modelación-Graficación favorece el uso de las formas de representación (numérico, gráfico y algebraico) así como el tránsito de un ambiente a otro a partir de la relación que se puede establecer entre ellas, sin embargo, con nuestra propuesta el aspecto algebraico no se logró del todo, surgieron importantes ideas como la relación entre variables y el intento por querer determinar la regla aunque no fue suficiente, creemos que conviene abordar más concretamente este aspecto a partir del análisis de la variación.

De estas actividades de Modelación-Graficación que proponemos emergieron dos cosas muy interesantes: La necesidad de contar con referentes o puntos de apoyo para argumentar y el uso de símbolos que surgen como apoyo en la

argumentación. El uso de estos referentes y símbolos van cargados de la intencionalidad de transmitir “un significado”, expresa también la funcionalidad de los objetos matemáticos que son usados con intención y en una situación específica.

La Modelación-Graficación juega un papel muy importante como medio para contrastar las propuestas de los participantes (“hipótesis”) con la situación real, de donde surgen “nuevos modelos” siguiendo el proceso de la categoría de M-G (Realizaciones múltiples, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo del razonamiento), estos “nuevos modelos” se resignifican cada vez que se ponen en escena permitiendo construir un patrón o modelo deseado así como la construcción del conocimiento. De allí que la M-G como práctica social implícita en una SDM es la que guía el proceso, es la que provoca que surjan estos constructos y la que nos mueve a actuar. Los argumentos construidos con la secuencia permitieron a los participantes interpretar una gráfica en términos del movimiento, la situación se hace presente en la argumentación, la gráfica tiene significado y sentido para ellos. Identifican cambios en la forma de la gráfica con relación al movimiento (velocidad, aceleración), desarrollan un nuevo uso de la gráfica a través de la resignificación del movimiento con los elementos de la categoría de M-G. Con respecto a lo numérico permitió identificar la cantidad que varía, sirvió de apoyo para predecir estados futuros y a través de esta inquietud establecer la regla que representa la situación aunque solo se lograron en algunos casos, comprendieron la relación que existe entre la tabla numérica y la gráfica y como una puede construirse a partir de la otra, pero sobre todo que provienen de una situación de lo cotidiano, no son conceptos abstractos sino que son usados con intención.

Se produjeron acercamientos interesantes a la conceptualización de la función cuadrática y a sus elementos que lo caracterizan tales como la concavidad, el vértice, el lado recto, así como el punto de intersección de la curva con el eje vertical; es importante señalar que estos conceptos se desarrollaron teniendo como sustento la SDM. La situación se hace presente en la argumentación, de

allí que estos conceptos son entendidos a partir de su aspecto funcional, de manera que la concavidad depende del cómo se produce el movimiento a partir del sensor (que representa un punto clave o bien identificado también como centro del sistema de referencia), el lado recto de la parábola es entendido cotidianamente como qué tan ancha o cerrada es la curva y eso depende de la forma en que se mueve la persona (relación tiempo- distancia) y así cada concepto es interpretado con relación a la SDM; de manera que los alumnos pueden interpretar una gráfica a través de la SDM y gracias a la M-G.

Referencias

- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.
- Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: Reconstrucción de argumentos y de significados. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 73-78.
- Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.
- Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 319-345.
- Secretaría de Educación Pública. (2013). *Documento Base del Bachillerato General*. Recuperado el 11 de Noviembre de 2014 de <http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/programasdeestudio.php>
- Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la Matemática escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico. Tesis de Doctorado*. México: Cinvestav-IPN.

Zaldívar, J. D. (2014). Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar. Tesis de Doctorado. México, D.F.: Cinvestav-IPN.